MINISTERUL EDUCAŢIEI NAȚIONALE

Dumitru SĂVULESCU
Mirela MOLDOVEANU
Oana UDREA

MATEMATICĂ M2

MANUAL PENTRU CLASA A XII-A

art
educațional

CUPRINS

PARTEA I

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul I

GRUPURI

Algebra din acest an studiază structuri algebrice.

Prin „structură algebrică" se înțelege o mulțime nevidă înzestrată cu una sau mai multe operații algebrice ce satisfac anumite axiome.

Aşadar structurile algebrice sunt definite cu ajutorul unui sistem axiomatic. Există o analogie între studiul axiomatic al structurilor algebrice şi studiul axiomatic al disciplinelor matematice, dar spre deosebire de geometrie, de exemplu, sistemul axiomatic ce defineşte o structură algebrică conține relativ mai puține axiome şi datorită acestui fapt, varietatea exemplelor ce le satisfac este mai mare.

În cele ce urmează vom prezenta gradat aceste structuri algebrice, începând cu cea mai simplă, cea de grup şi vom încheia cu cele mai complexe, cele de inel şi corp.

Vom începe prin a defini legi de compoziție internă şi prezentarea unor proprietăți ale acestora.

1. LEGI DE COMPOZIȚIE INTERNĂ

1.1. Lege de compoziție internă

Se ştie că suma, respectiv produsul a două numere naturale este tot un număr natural. Prin urmare pentru orice pereche de numere naturale (x, y) numerele $x + y$ respectiv xy sunt tot numere naturale. Putem vorbi despre funcțiile:

$s : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(x, y) = x + y$ şi $p : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $p(x, y) = xy$ unde $(x, y)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Diferența a două numere întregi este tot un număr întreg.

Avem funcția $d: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $d(x, y) = x - y$ unde $(x, y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Considerăm mulțimea nevidă E şi notăm cu $\mathcal{F}(E)$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe E cu valori în E: $\mathcal{F}(E)= \{f \mid f: E \to E\}$.

Dacă $f, g\in\mathcal{F}(E)$ atunci funcția compusă $f\circ g$ este definită pe E cu valori în E. Cu alte cuvinte avem o funcție:

$\mathrm{H} : \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E) \to \mathcal{F}(E)$, $\mathrm{H}(f, g)=f\circ g$ unde $(f, g) \in \mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E)$.

În toate aceste exemple se vorbeşte despre o mulțime M (care a fost pe rând $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ respectiv $\mathcal{F}(E)$) şi o funcție definită pe $M \times M$ cu valori în M, care oricărei perechi ordonate $(x, y) \in M \times M$ asociază un element unic din M.

Definiție

Fie M o mulțime nevidă. Se numește ***lege de compoziție internă*** pe mulțimea M (sau ***operație algebrică*** pe M) o funcție definită pe produsul cartezian $M \times M$ cu valori în M:

$* : M \times M \to M., (x, y) \to x * y$

care asociază fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$ un unic element din M, notat $x * y$.

Elementul $x * y$ se numește compusul lui x cu y și se mai citește „x operat cu y” sau „x steluță y”.

Legea de compoziție internă se notează de obicei cu unul dintre semnele: $+$, $-$, $\cdot$, $\circ$, $*$, $\top$, $\perp$, $\vee$, $\wedge$, $\oplus$, Δ, $\cap$, $\cup$ etc.

O lege de compoziție internă pe mulțimea M notată cu semnul „+” o vom numi ***adunare***, iar compusul $f(x, y) = x + y$ îl vom numi ***suma*** elementelor x și y. În acest caz vom spune că legea a fost notată ***aditiv***.

O lege de compoziție internă pe mulțimea M notată cu semnul „·” o vom numi ***înmulțire***, iar compusul $f(x, y) = x \cdot y$ îl vom numi ***produsul*** elementelor x și y. În acest caz vom spune că legea a fost notată ***multiplicativ***.

Exemple:

1. Înmulțirea pe $\mathbb{R}$ este funcția: $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to xy, (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
2. Ridicarea la putere pe $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $(x, y) \to x^y$ unde $(x, y) \in \mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.
3. Reuniunea pe mulțimea $\mathscr{P}(E)$ a părților unei mulțimi E este funcția:
   $\cup : \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E), (A, B) \to A \cup B$.
4. Adunarea pe mulțimea matricelor $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, este funcția:
   $+ : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), (A, B) \to A + B$.
5. Pe mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție „*” astfel:
   . $* : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x * y = 3xy - 5x - 5y + 1,\ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Astfel: $2 * 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 1 = -8 \in \mathbb{R}$.

1.2. Tabla unei legi de compoziție

În cazul unei mulțimi finite $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ o operație algebrică „*” poate fi definită și prin ceea ce numim ***tabla operației***, adică un tablou cu n+1 linii și n+1 coloane care conține elementul $a_i * a_j$ la intersecția liniei lui a_i cu coloana lui a_j. de forma:

$*$	a_1	a_2	$\ldots$	a_j	$\ldots$	a_n
a_1	a_1*a_1	a_1*a_2	$\ldots$	a_1*a_1	$\ldots$	a_1*a_n
a_2	a_2*a_1	a_2*a_2	$\ldots$	a_2*a_j	$\ldots$	a_2*a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
a_i	a_i*a_1	a_i*a_2	$\ldots$	a_i*a_j	$\ldots$	a_i*a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$
a_n	a_n*a_1	a_n*a_2	$\ldots$	a_n*a_j	$\ldots$	a_n*a_n

Exemplul 1. Fie mulţimea $A = \{-1, 0, 1\}$ şi legea de compoziţie - înmulţirea numerelor reale. Tabla înmulţirii pe mulţimea A este:

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

Exemplul 2. Fie mulţimea $A = \{1, 2\}$. Mulţimea $\mathscr{F}(A)$ a funcţiilor definite pe A cu valori în A are elementele: e, f, g, h date prin: $e(1) = 1$, $e(2) = 2$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $h(1) = 2$, $h(2) = 2$.
Tabla operaţiei de compunere a funcţiilor din $\mathscr{F}(E)$ este următoarea:

$\circ$	e	f	g	h
e	e	f	g	h
f	f	e	h	g
g	g	g	g	g
h	h	h	h	h

Se observă din tabla operaţiei că $f \circ g = h$. Într-adevăr avem:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2; \qquad (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 2$$

de unde rezultă că $f \circ g = h$. Prin urmare la intersecţia liniei lui f cu coloana lui g se află h.

Exemplul 3. Pe mulţimea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ se defineşte legea de compoziţie

$$\varphi(x, y) = |x - y|,\ x, y \in M.$$

Tabla operaţiei este prezentată alăturat.
Elementele din tablă se calculează astfel:
$\varphi(0, 0) = |0 - 0| = 0$; $\varphi(0, 1) = |0 - 1| = 1$ etc.
$\varphi(1, 3) = |1 - 3| = 2$; $\varphi(3, 3) = |3 - 3| = 0$.

φ	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

1.3. Parte stabilă

Să considerăm operaţia de înmulţire pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi submulţimea $\mathbb{Q}$ a lui $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ este mulţimea numerelor raţionale). Înmulţind două numere oarecare $a, b \in \mathbb{Q}$, produsul ab se menţine în $\mathbb{Q}$, mai precis rezultatul înmulţirii din $\mathbb{Q}$ face parte tot din $\mathbb{Q}$.

Aceasta ne conduce la următoarea:

Definiţie

Fie M o mulţime nevidă pe care este definită o operaţie „$*$". O submulţime nevidă H a lui M se numeşte parte a lui M stabilă faţă de operaţia algebrică „$*$" dacă

$$(\forall)\ x, y \in H \Rightarrow x * y \in H.$$

În acest caz, restricţia operaţiei „$*$" la submulţimea H, adică funcţia:

$$* : H \times H \to H,\ (x, y) \to x * y$$

se numeşte operaţie algebrică pe H ***indusă*** de operaţia „$*$" de pe M.

Observație

Dacă „*" este o operație pe mulțimea M, iar H o submulțime a lui M, sunt echivalente exprimările:

1°. H este o parte a lui M, stabilă față de operația „*";

2°. „*" este operație algebrică pe H.

Exemple:

1) Mulțimea $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ a numerelor întregi pare este o parte a lui $\mathbb{Z}$ stabilă în raport cu operația de adunare a numerelor întregi, deoarece suma a două numere pare este tot un număr par.

2) Mulțimea $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ este o parte stabilă față de legea de compoziție $|-| : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \to |x - y|$ deoarece $(\forall)\, x,y \in H \Rightarrow |x - y| \in H$.

3) Submulțimea $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ este o parte a lui $\mathbb{C}$ stabilă față de înmulțirea deoarece: $(\forall)\, x,y \in H \Rightarrow |x \cdot y| = |x| \cdot |y| = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow x \cdot y \in H$.

4) Fie $E = \{1, 2, 3\}$ și $H = \{f \in \mathscr{F}(E) \mid f(2) = 2\}$. Atunci H este o parte a lui $\mathscr{F}(E)$ stabilă în raport cu operația de compunere. Într-adevăr, dacă $f, g \in H$ atunci $f(2) = 2$, $g(2) = 2$, deci: $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 2$, de unde $f \circ g \in H$.

5) Mulțimea $\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu înmulțirea, dar nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu adunarea.

Problemă rezolvată

Fie mulțimea $A = [2, +\infty)$. Să se arate că mulțimea A este parte stabilă a mulțimii numerelor reale **R** în raport cu legea de compoziție:

$$x * y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Soluție. Considerăm elementele oarecare $x,y \in [2, +\infty) \Rightarrow x \geq 2$ și $y \geq 2$ adică $x - 2 \geq 0$ și $y - 2 \geq 0$. Rezultă că $(x - 2)(y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) + 2 \geq 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 \geq 2 \Leftrightarrow x * y \geq 2 \Leftrightarrow x * y \in [2, +\infty) = A$. Prin urmare mulțimea A este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea dată.

1. 4. Proprietăți ale legilor de compoziție internă

1. Asociativitatea

Definiție

O operație algebrică „*" pe mulțimea M se numește ***asociativă***, dacă:

$$(x * y) * z = x * (y * z),\ (\forall)\, x,y,z \in M.$$

Exemple:

1. Adunarea și înmulțirea sunt operații asociative pe oricare dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

2. Adunarea matricelor în mulțimea $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ este asociativă $(\forall m,n \in \mathbb{N}^*)$.

3. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, prin $x * y = xy - 2x - 2y + 1$. Să cercetăm dacă legea $*$ este asociativă.

$$(x * y) * z = (xy - 2x - 2y + 1) * z = xyz - 2xz - 2yz + z - 2xy + 4x +$$
$$+ 4y - 2 - 2z + 1 = xyz - 2xy - 2xz - 2yz + 4x + 4y - z - 1 \qquad (*)$$
$$x * (y * z) = x * (yz - 2y - 2z + 1) = xyz - 2xy - 2xz + x - 2x - 2yz +$$
$$+ 4y + 4z - 2 + 1 = xyz - 2xy - 2xz - 2yz - x + 4y + 4z - 1 \qquad (**)$$

Din (*) şi (**) rezultă că operaţia nu este asociativă.

4. Tot pe $\mathbb{R}$ reluând calculele pentru operaţia $x * y = xy - 2x - 2y - 6$ se ajunge la concluzia că aceasta este asociativă.

Observaţie

Dacă „*" este o operaţie pe M, iar H este o parte a lui M, stabilă faţă de „*", atunci: dacă „*" este asociativă pe M, ea este asociativă şi pe H.

2. Comutativitatea

Definiţie

O operaţie algebrică „*" pe mulţimea M se numeşte ***comutativă***, dacă:

$$x * y = y * x, \quad (\forall)\, x,y \in M.$$

Exemple:

1. Adunarea şi înmulţirea pe oricare dintre mulţimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt legi de compoziţie comutative.

Demonstrăm comutativitatea adunării numerelor complexe. Fie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + ib$ şi $z_2 = a' + ib'$; avem $z_1 + z_2 = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + i(b + b') = (a' + a) + i(b' + b) = a' + ib' + a + ib = z_2 + z_1$, deci adunarea numerelor complexe este comutativă.

2. Reuniunea şi intersecţia părţilor unei mulţimi sunt legi de compoziţie comutative.

3. Pe $\mathbb{R}$ definim legea „*" astfel: $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x * x = 4xy - 5(x + y) + 3$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

Arătăm că legea $*$ este comutativă: $x * y = 4xy - 5(x + y) + 3 = 4yx - 5(y + x) + 3 = y * x$, $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$ (s-a folosit proprietatea de comutativitate a înmulţirii $x \cdot y = y \cdot x$ şi adunării $x + y = y + x$ numerelor reale).

4. În clasa a XI-a s-a arătat că înmulţirea matricelor nu este comutativă.

5. Scăderea în $\mathbb{Z}$ este o lege de compoziţie necomutativă. Exemplu: $7 - 10 \neq 10 - 7$.

6. Compunerea funcţiilor nu este comutativă. Într-adevăr fie $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ definite prin:

$f(x) = 2x^2$ şi $g(x) = x - 3$.

Atunci $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(g(x))^2 = 2(x - 3)^2 = 2x^2 - 12x + 18$;

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 3 = 2x^2 - 3$.

Se vede că $f \circ g \neq g \circ f$.

Observații:

1. Dacă „*” este o operație pe M, iar H este o parte a lui M, stabilă față de „*”, atunci: dacă „*” este comutativă pe M, ea este comutativă și pe H.
2. Dacă „*” este o operație pe M dată prin tabla operației, operația „*” este comutativă dacă și numai dacă tabla operației este simetrică față de diagonala principală, deoarece elementele $x_i * x_j$ și $x_j * x_i$ sunt dispuse simetric față de diagonala principală și deci egale.

Aplicație

Fie M mulțimea tuturor secvențelor de 12 litere din alfabetul latin, numite „cuvinte” de lungime 12. Pentru $\alpha,\beta \in M$ definim cuvântul $\alpha * \beta$ astfel: $\alpha * \beta$ este cuvântul format cu primele 7 litere ale lui α urmate de ultimele 5 litere ale lui β. De exemplu, dacă $\alpha = abacdefggium$ și $\beta = aeioubcccmnq$, atunci $\alpha * \beta = abacdefccmnq$.

Verificați dacă legea de compoziție „$*$” este asociativă. Dar comutativă?

Soluție:

Orice cuvânt $\alpha \in M$ se poate scrie sub forma $\alpha = \alpha'\alpha''$, unde α' este secvența formată cu primele 7 litere ale lui α și α'' este secvența formată cu ultimele 5 litere ale lui α.

Fie $\alpha,\beta,\gamma \in M$, $\alpha = \alpha'\alpha''$, $\beta = \beta'\beta''$, $\gamma = \gamma'\gamma''$.

$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha'\beta'' * \gamma = \alpha'\gamma''$ (1)

$\alpha * (\beta * \gamma) = \alpha * (\beta'\gamma'') = \alpha'\gamma''$ (2)

Din (1) și (2) rezultă că legea „$*$” este asociativă.

Legea nu este comutativă deoarece $\alpha * \beta = \alpha'\beta''$ și $\beta * \alpha = \beta'\alpha''$ (găsiți un contraexemplu).

3. Distributivitatea

Definiție

Fie „*” și „∘” două operații algebrice pe aceeași mulțime M.

Spunem că operația „*” este distributivă la stânga față de operația „∘”, dacă:

(1) $x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z)$, $(\forall)\ x,y,z \in M$.

Spunem că operația „*” este distributivă la dreapta față de operația „∘”, dacă:

(2) $(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x)$, $(\forall)\ x,y,z \in M$.

Spunem că operația „*” este distributivă față de operația „∘”, dacă este distributivă atât la stânga cât și la dreapta, adică sunt verificare ambele condiții (1) și (2).

Observație

Fie „*” și „∘” două operații pe M, iar H o parte a lui M stabilă față de ambele operații, dacă „*” este distributivă față de „∘” pe M, atunci „*” este distributivă față de „∘” și pe H.

Exemple:

1. Pe oricare dintre mulțimile $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt definite operațiile de adunare și înmulțire. Legea de compoziție „înmulțirea” este distributivă față de „adunare”:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac,\ \forall\ a,b,c \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

2. Pe mulţimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sunt definite adunarea şi înmulţirea matricelor. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare:

$$A \cdot (B + C) = AB + AC, \ \forall A,B,C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. Element neutru

Se ştie că $0 + x = x + 0$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ respectiv $1 \cdot x = x \cdot 1$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

De asemenea, dacă E este o mulţime şi $1_E : E \to E$ este funcţia identică a lui E, atunci:

$$1_E \circ f = f \circ 1_E = f, (\forall) f \in \mathcal{F}(E).$$

Astfel suntem conduşi spre următoarea definiţie:

Definiţie

Fie $(x, y) \to x * y$ o lege de compoziţie pe mulţimea M. Spunem că legea admite element neutru dacă $\exists\, e \in M$ astfel încât:

$$x * e = e * x = x, (\forall)\, x \in M.$$

Elementul e cu această proprietate (dacă există) se numeşte ***element neutru*** faţă de operaţia „*”.

Pe $\mathbb{Z}$, $x * y = x + y + 1$ admite elementul neutru $e = -1 \in \mathbb{Z}$, deoarece:

$x * (-1) = x + (-1) + 1 = x$ şi $(-1) * x = -1 + x + 1 = x$, $\forall x \in M$.

Teorema 1

Dacă o lege de compoziţie internă admite element neutru, atunci acesta este unic.

Demonstraţie. Fie $(x, y) \to x * y$ o lege de compoziţie pe mulţimea M şi $e', e'' \in M$ două elemente neutre faţă de această lege de compoziţie. Atunci:

(1) $\quad x * e' = e' * x = x, (\forall)\, x \in M$

şi

(2) $\quad x * e'' = e'' * x = x, (\forall)\, x \in M$

Luând în particular în (1) $x = e'' \in M$ şi în (2) $x = e' \in M$, obţinem:

(3) $\quad e'' * e' = e' * e'' = e''$,

şi

(4) $\quad e' * e'' = e'' * e' = e'$.

Din (3) şi (4) rezultă $e' = e''$.

Exemple:

1. Faţă de legea de compoziţie $(x, y) \to x \cdot y$, în mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, elementul neutru este număr real 1, deoarece pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, (\forall)\, x \in \mathbb{R}.$$

2. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi legea de compoziţie $(x, y) \to x + y$. Elementul neutru este numărul întreg 0, deoarece este singurul număr întreg pentru care $x + 0 = 0 + x = x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{Z}$.

3. În mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a matricelor pătrate de ordinul n cu coeficienți reali avem legile de compoziție: adunarea $(A, B) \to A + B$ şi înmulțirea $(A, B) \to A \cdot B$. Elementele neutre față de aceste legi de compoziție sunt respectiv matricea O_n (matricea zero de ordin n) şi matricea unitate de ordin n care s-a notat cu I_n.
4. Mulțimea $2\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a numerelor naturale pare este o parte a lui $\mathbb{N}$ stabilă în raport cu înmulțirea şi legea indusă de către aceasta pe $2\mathbb{N}$ nu admite element neutru. Într-adevăr, din $x \cdot e = e \cdot x = x$, $(\forall)\, x \in 2\mathbb{N}$ ar rezulta $e = 1$, dar $1 \notin 2\mathbb{N}$.
   Aceeaşi mulțime în raport cu adunarea are ca element neutru pe 0 deoarece 0 este număr par şi $2k + 0 = 0 + 2k = 2k,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.
5. Fie $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$. M este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea, deoarece $A(x) \cdot A(y) = A(2xy) \in M$, $(\forall)\, A(x), A(y) \in M$. $A(\frac{1}{2}) \in M$ şi $A(\frac{1}{2}) \cdot A(x) = A(x) \cdot A(\frac{1}{2}) = A(x)$, $(\forall)\, A(x) \in M$, deci $A(\frac{1}{2})$ este element neutru al operației „·" pe M.
   Deşi $I_3 \cdot A(x) = A(x) \cdot I_3 = A(x)$, $(\forall)\, A(x) \in M$, I_3 nu este element neutru al operației „·" pe M, deoarece $I_3 \notin M$.

Observație

În cazul când legea de compoziție este notată aditiv, elementul neutru este notat cu 0 şi se numeşte elementul zero.

Dacă legea de compoziție este notată multiplicativ, elementul neutru se numeşte elementul unitate.

Definiție

Fie $(x, y) \to x * y$ o lege de compoziție asociativă pe M. Definim:

$$x_1 * x_2 * \ldots * x_n \overset{\text{def.}}{=} (x_1 * x_2 * \ldots * x_{n-1}) * x_n .$$

Am definit astfel prin inducție compunerea unui număr finit de elemente din M:

$$x_1 * x_2 * x_3 = (x_1 * x_2) * x_3$$

$$x_1 * x_2 * x_3 * x_4 = (x_1 * x_2 * x_3) * x_4$$

....

$$x_1 * x_2 * \ldots * x_n \overset{\text{def.}}{=} (x_1 * x_2 * \ldots * x_{n-1}) * x_n .$$

Fie M o mulțime înzestrată cu o lege de compoziție asociativă, ***multiplicativă*** şi cu element neutru $e \in M$. Pentru orice $x \in M$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ definim puterea n-a a lui x prin:

$$x^n \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x & (n \text{ factori}), \text{ dacă } n \neq 0 \\ e \quad , & \text{dacă } n = 0 \end{cases}$$

Avem evident

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} .$$

Dacă M este înzestrată cu o lege de compoziție asociativă ***aditivă*** și dacă element neutru $0 \in M$ atunci pentru orice $x \in M$ și orice $n \in \mathbb{N}$, definim nx prin:

$$nx \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x + x + \ldots + x \ \ (n \text{ termeni}), & \text{dacă } n \neq 0 \\ 0 \qquad , & \text{dacă } n = 0 \end{cases}$$

Rezultă imediat că

$$nx + mx = (n + m) \cdot x.$$

În cazul multiplicativ scriem adeseori:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \ \text{ în loc de } \ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n,$$

iar în cazul aditiv scriem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ \text{ în loc de } \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Problemă rezolvată

Fie mulțimea $A = (-1, 1)$ pe care se definește legea: $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Să se determine elementul neutru față de această lege.

Soluție. Notăm cu e elementul neutru dacă el există: $x * e = e * x = x \Leftrightarrow \dfrac{x+e}{1+xe} = x \Leftrightarrow$ $x + e = x + x^2 e \Leftrightarrow e(1 - x^2) = 0$, $(\forall) x \in (-1, 1) \Rightarrow e = 0$ și $0 \in A$. În concluzie elementul neutru este 0.

Verificare: $x * 0 = \dfrac{x+0}{1+x\cdot 0} = x$ și $0 * x = \dfrac{0+x}{1+0\cdot x} = x$.

Observație

Un cuplul $(G, *)$, unde G este o mulțime nevidă iar „$*$” este o operație algebrică pe mulțimea G asociativă și care admite element neutru se numește ***monoid***.

5. Element simetrizabil

Definiție

Dacă „$*$” este o operație pe mulțimea M, având elementul neutru e, spunem că un element $x \in M$ este ***simetrizabil*** față de operația „$*$”, dacă există $x' \in M$ cu proprietatea:

$$x * x' = x' * x = e.$$

Elementul x' se numește ***simetricul*** lui x față de operația „$*$”.

Notație

În notație aditivă, simetricul elementului x se notează cu $-x$ și se numește ***opusul*** lui x.

În notația multiplicativă simetricul lui x, dacă există, se notează x^{-1} sau $\dfrac{1}{x}$ și se numește ***inversul*** lui x (iar x se numește ***element inversabil***), evident $x \neq 0$.